第13講　空間図形とベクトル
PART1　位置ベクトル

1　1辺の長さが1の立方体 ABCD－EFGH において，辺 AB，CG，HE を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角 θ を求めよ。

Point Pickup

平面と同様，空間においても，2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して

線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ (s，t，u は実数)の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$$

である。

第 13 講　PART1　確認問題

1　1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AB，GF，GC を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{PQ}=$ [ア]，$\overrightarrow{PR}=$ [イ]

[[ア]，[イ] の選択肢]

① $t\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}$　② $(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}$

③ $\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$　④ $\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

⑤ $\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

⑥ $(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

⑦ $(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}$

⑧ $(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を $\theta(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ。

$$\cos\theta=\frac{t^2-\boxed{ウ}\,t+\boxed{エ}}{\boxed{オ}\,t^2-\boxed{カ}\,t+\boxed{キ}}$$

第 13 講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

1　1辺の長さが1の立方体 ABCD－EFGH において，辺 AB，CG，HE を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

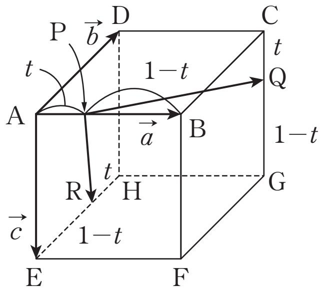
$=\{(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AG}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=(1-t)(\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-t\vec{a}=(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\{t\overrightarrow{AE}+(1-t)\overrightarrow{AH}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=t\vec{c}+(1-t)(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{a}=-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}$



(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2$

$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2+2(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{b}\cdot\vec{c}+2t(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=(1-t)^2\times1^2+1^2+t^2\times1^2=2t^2-2t+2$

$|\overrightarrow{PR}|^2=|-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=(-t)^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=t^2\times1^2+(1-t)^2\times1^2+1^2=2t^2-2t+2$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}$

$=(1-t)\times(-t)+1\times(1-t)+t\times1=t^2-t+1$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{t^2-t+1}{\sqrt{2t^2-2t+2}\sqrt{2t^2-2t+2}}=\dfrac{t^2-t+1}{2(t^2-t+1)}=\dfrac{1}{2}$

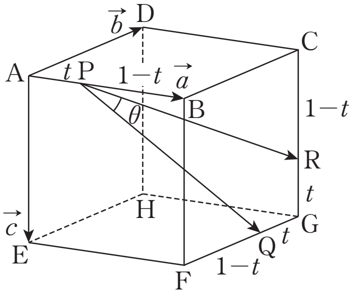
$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

第13講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑦，イ：⑥，ウ：4，エ：3，オ：2，
カ：4，キ：3

[解説]



(1) $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

$=\{t\overrightarrow{AF}+(1-t)\overrightarrow{AG}\}-t\overrightarrow{AB}$ [A]

$=\{t(\vec{a}+\vec{c})+(1-t)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}-t\vec{a}$

$=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\{t\overrightarrow{AC}+(1-t)\overrightarrow{AG}\}-t\overrightarrow{AB}$ [A]

$=\{t(\vec{a}+\vec{b})+(1-t)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}-t\vec{a}$

$=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}}$

[A]　平面と同様，空間においても，2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して
線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

(2) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}|^2$ [B]

$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$+2(1-t)^2\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}$

$+2(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=(1-t)^2\times1^2+(1-t)^2\times1^2+1^2$

$=2t^2-4t+3$

[B]　s，t，u を実数とすると，ベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2$$
$$=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2$$
$$+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=|(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}|^2$$ [B]

$$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+(1-t)^2|\vec{c}|^2$$
$$+2(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+2(1-t)^2\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=(1-t)^2\times1^2+1^2+(1-t)^2\times1^2$$
$$=2t^2-4t+3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\{(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}$$
$$\cdot\{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}$$
$$=(1-t)^2\times1^2+(1-t)\times1^2$$
$$+(1-t)\times1^2$$
$$=t^2-4t+3$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}$$
$$=\frac{t^2-4t+3}{\sqrt{2t^2-4t+3}\sqrt{2t^2-4t+3}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{t^2-4t+3}{2t^2-4t+3}}$$